Nuevo enfoque a Fibonacci

New Focus to Fibonacci

Sergio Adrián Martin

ISSN 1992-6510

23

REALIDAD Y REFLEXIÓN
Reality and Reflection

Año 7, N° 23 **San Salvador, El Salvador, Centroamérica** **Revista Cuatrimestral** **mayo-agosto 2008**
Year 7, N° 23 San Salvador, El Salvador, Central America Quarterly Journal May-August 2008

Nuevo enfoque a Fibonacci

New Focus to Fibonacci

Sergio Adrián Martin
Investigador y Docente
Universidad Francisco Gavidia

El autor expone un estudio histórico de la serie de Fibonacci, las múltiples series que han evolucionado a partir de ella, y una nueva fórmula para expresarla, válida para una cantidad considerable de sus términos. A partir de 1975 avanza el estudio de los fractales, y para numerosos especialistas de este conjunto de técnicas, el empleo de algoritmos simples en los cuales el resultado es un ejemplo de que intuitivamente Fibonacci ya aplicaba una lógica fractal. Fibonacci pertenece a una sucesión precisa comparativamente sencilla. Esto nos remite a reflexionar que para numerosas series y fórmulas conocidas bien puede haber nuevos planteamientos, que no conocemos en la actualidad, y que todavía no se expresa la última palabra en el mundo de las matemáticas. FIBONACCI-MATEMÁTICAS.

The author presents a new historical study of the Fibonacci series. The multiple series that have evolved based on it, and a new formula to express it, valid for a considerable amount of its terms From 1975, the study goes to the fractals and for several specialists, this set of techniques and the application of some simple algorithms whose result is an example of how Fibonacci used to apply intuitively a fractal logical. Fibonacci belongs to a precise and comparatively simple succession. This makes us reflect that for numerous series and known formulas, there could be new statements that we do not know nowadays and that the last word in the Mathematics world has not been yet said. FIBONACCI MATHEMATICS.

INTRODUCCIÓN

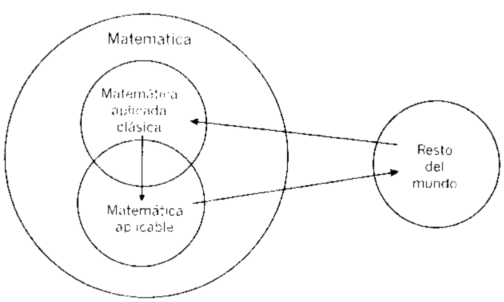
La serie de Fibonacci fue desarrollada por Leonardo de Pisa en la Edad media. El nombre proviene del hecho de que a Leonardo se le conocía también como Filo de Bonacci, debido a su padre.

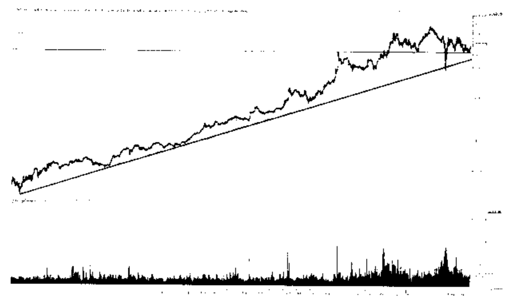
Fue un aporte relativamente modesto y sencillo en una época en que el oscurantismo estaba llegando a su fin y los aportes de la matemática crecían a la par de ansias de encontrar nueva formas de hacer las cosas.

Uno de los logros de Leonardo de Pisa fue el haber pasado de usar la obsoleta numeración romana, de todos bien conocida a la actual numeración indo-arábiga. Esto fue posible gracias a sus viajes al norte de África, donde tal tecnología hacía mucho tiempo estaba en boga.

En la actualidad, los números romanos han pasado a ser casi un producto decorativo, mientras que los números arábicos son de uso diario, a pesar de que los valores y principios de los árabes difieren enormemente de los valores de la Italia medieval.

La serie de Fibonacci propiamente dicha se caracteriza por lo siguiente: si se parte de dos números como 1 y 0, el tercer término de la serie será la suma de los dos anteriores, es decir que el tercer término será 1, el





cuarto término será la suma del segundo y tercer término, es decir 1+1, cuyo resultado será 2, el quinto el resultado de la suma de 1+2=3. Generalizando, lo que tenemos es: $A_{n+1}=A_n+A_{n-1}$

El resultado es la siguiente secuencia: 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34...etc.

IMPLICACIONES ESTÉTICAS

En un principio la serie de Fibonacci no pasó de ser una curiosidad, pero los arquitectos, quienes recibían una influencia notable de los matemáticos de la época decidieron usar este aporte de Fibonacci a lo que en su momento fue conocido como la relación aurea.

Si se dividen dos términos consecutivos de la serie de Fibonacci se forma una relación de proporcionalidad que tiende a un valor fijo. Para ello observe la siguiente tabla:

	an	relaciones
1	0	*
2	1	*
3	1	1
4	2	2
5	3	1.5
6	5	1.6666667
7	8	1.6

8	13	1.625
9	21	1.6153846
10	34	1.6190476
11	55	1.6176471

Este número fue aplicado en su momento para establecer la relación entre los lados de las ventanas de las iglesias.

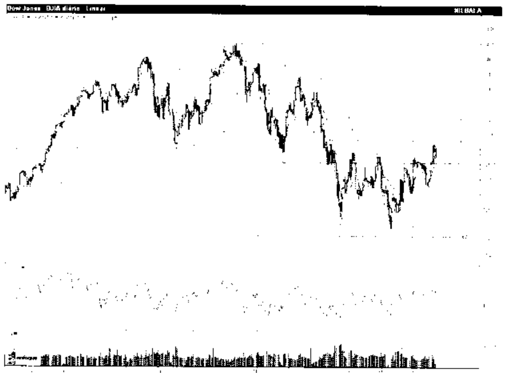
Por ejemplo, si el ancho de una ventana era de cinco ladrillos el alto se dejaba de ocho. Sin embargo, rara vez se diseñaban relaciones utilizando términos más grandes debido a que ello implicaba usar un tipo de elementos aun no conocidos: el uso de un gran número de cifras en la expresión numérica.

Sin embargo, la forma de calcular la relación aurica llegó a un punto definitivo que pudo expresarse con números racionales con la siguiente fórmula:

$$1.618033989=\frac{1+\ 5}{2}$$

Los expertos en geometría sabían cómo calcular tal número, especialmente el número racional de la raíz de cinco mediante la aplicación del teorema de Pitágoras:

En un triángulo como el anterior se observa que si un lado vale 1 el otro 2, la aplicación del teorema de Pitágoras lleva necesariamente a que el cateto mayor valga la raíz de cinco. Si a este lado se suma 1 y se encuentra el punto medio de este nuevo lado se encuentra el valor del número aurico.



OTRAS SERIES DERIVADAS DE LA DE FIBONACCI

El hecho de que existiera una relación geométrica que tiende a ser constante contribuyó a que algunos matemáticos idearan lo que hoy se conoce como las series geométricas:

$$S=\sum_{k=1}^{n} a^k$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Posteriormente, la búsqueda de relaciones especiales entre los términos de las series dio origen a algunas de las series más conocidas.

Las series de Taylor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

La serie Maclaurin derivada directamente de la serie de Taylor

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

A su vez de la serie de Maclaurin se han derivado otras expresiones:

$$\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)}x^{2n}$$

$$sen(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$$

De estas formas se han derivado otras de forma más genérica tal es el caso de la serie de Laurent:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$$

En la actualidad todas estas series han tenido una implicación muy simple: los métodos numéricos que muchos ingenieros utilizan para resolver muchos de sus problemas prácticos y que también son aplicables a los algoritmos usados por los microprocesadores y muchos sistemas de cómputo.

FRACTALES Y FIBONACCI

Desde 1975 a la actualidad se han desarrollado una ciencia nueva, la de los fractales, y para muchos estudiosos de esta tecnología, el uso de algoritmos simples en los cuales el próximo resultado depende del anterior es una muestra de que intuitivamente Fibonacci ya estaba usando una lógica fractal mucho tiempo antes de que esta tecnología tuviese un nombre propio.

Probablemente la siguiente implicación fractal que se derivó de esto la planteó Pascal, al desarrollar su famoso triángulo:

En la actualidad este arreglo es utilizado por muchos estudiantes de bachillerato para resolver las expresiones polinómicas complejas, de una mejor forma que como se hace usando el binomio de Newton.

REENFOQUE DE FIBONACCI

Regresando a serie de Fibonacci, dado que el algoritmo de la cual se origina sería bastante simplista decir que no vale la pena replantearlo cuando hay que considerar ciertos hechos:

1- Para llegar a calcular el término 1000 de la serie hay que calcular primero los 999 anteriores, lo cual implica que el algoritmo básico se vuelve más largo cuanto más alto es el término de la serie.

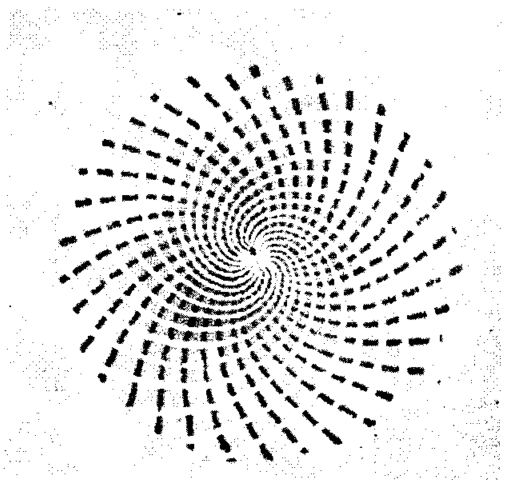
2- El usar una simple relación exponencial resulta insuficiente para llegar a una nueva expresión para plantear los términos de Fibonacci.

Así por ejemplo, si se busca una función exponencial que incluya los primeros 40 términos de la serie, se tendrá:

$$g = ka^n$$

Donde g es la salida de la función exponencial, n el orden en la serie Fibonacci y a la base aurica, es decir a = 1.618033989, el valor de k debería ser 0.27639320225000000.

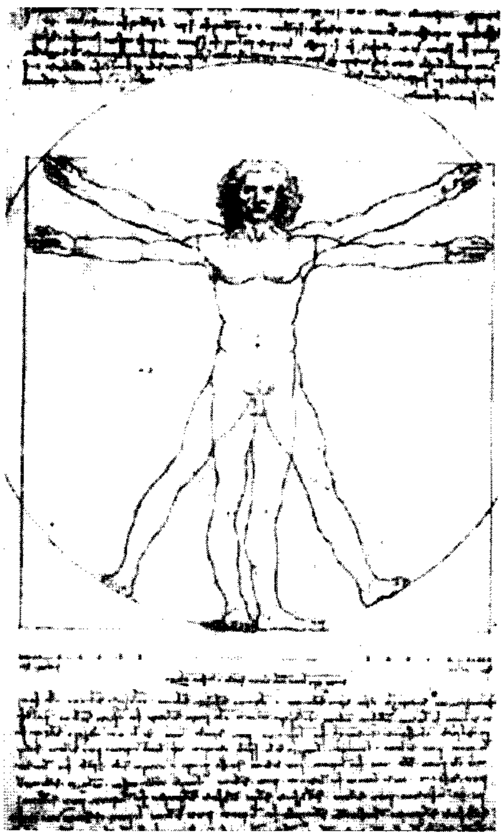
Al tabular los términos de Fibonacci contra la función exponencial se tendrá:

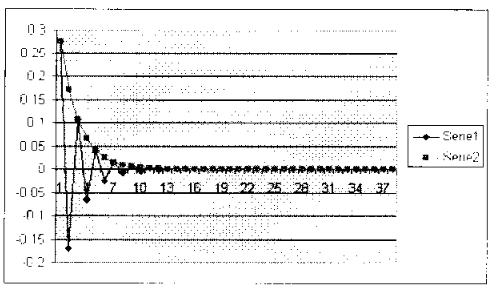


FIBONACCI OTRA VEZ	SECUENCIA EXPONENCIAL
0	—
1	0.723606798
1	1.170820393
2	1.894427191
3	3.065247584
5	4.959674775
8	8.024922359
13	12.98459713
21	21.00951949
34	33.99411663
55	55.00363612
89	88.99775275
144	144.0013889
233	232.9991416
377	377.0005305
610	609.9996721
987	987.0002026
1597	1596.999875
2584	2584.000077
4181	4180.999952
6765	6765.00003
10946	10945.99998
17711	17711.00001
28657	28656.99999
46368	46368
75025	75025
121393	121393
196418	196418
317811	317811
514229	514229
832040	832040
1346269	1346269
2178309	2178309
3524578	3524578
5702887	5702887
9227465	9227465
14930352	14930352
24157817	24157817
39088169	39088169

Ya que existen errores obvios, especialmente a nivel de los primeros términos de la serie, al computar el error se tiene la siguiente tabla, su gráfica y la gráfica de su valor absoluto.

ERROR	Acercamiento exponencial al error valor absoluto de la función
0.2763932	0.2763932
-0.17082039	0.17082039
0.10557281	0.10557281
-0.06524758	0.06524758
0.04032522	0.04032522
-0.02492236	0.02492236
0.01540287	0.01540287
-0.00951949	0.00951949
0.00588337	0.00588337
-0.00363612	0.00363612
0.00224725	0.00224725
-0.00138888	0.00138888
0.00085837	0.00085837
-0.0005305	0.0005305
0.00032787	0.00032787
-0.00020263	0.00020263
0.00012523	0.00012523
-7.7399E-05	7.7399E-05
4.7836E-05	4.7836E-05
-2.9563E-05	2.9563E-05
1.8272E-05	1.8272E-05
-1.1291E-05	1.1291E-05
6.9813E-06	6.9813E-06
-4.3098E-06	4.3098E-06
2.6715E-06	2.6715E-06
-1.6383E-06	1.6383E-06
1.0332E-06	1.0332E-06
-6.0513E-07	6.0513E-07
4.2806E-07	4.2806E-07
-1.7707E-07	1.7707E-07
2.5099E-07	2.5099E-07
7.3574E-08	7.3574E-08
3.2503E-07	3.2503E-07
3.9861E-07	3.9861E-07
7.2457E-07	7.2457E-07
1.1232E-06	1.1232E-06
1.844E-06	1.844E-06
2.9653E-06	2.9653E-06





Para el observador entrenado, esta gráfica tiene un notable parecido con una función exponencial (la de color rojo que corresponde al valor absoluto del error), y la azul que corresponde al error mismo es similar a una función sinusoidal amortiguada.

En busca de deducir una forma de compensar este error, lo más conveniente es que busque una expresión matemática de él.

Al buscar una relación entre términos consecutivos de la función error absoluto se tiene:

$$r = \frac{t_n}{t_{n+1}}$$

Al aplicar esta relación entre los primeros 10 términos se obtienen:

0.2763932	1.61803399
0.17082039	1.61803399
0.10557281	1.61803399
0.06524758	1.61803399
0.04032522	1.61803399
0.02492236	1.61803399
0.01540287	1.61803399
0.00951949	1.61803399

Es obvio que vuelve a aparecer el número áurico, pero ya que la exponencial es decreciente, debe de darse el caso de que el exponente debe de tener signo negativo.

De aquí que el valor absoluto del error será:

$$e_a = 0.2763932a^{-(n-2)}$$

Sin embargo, hay que recordar que esta fórmula sería válida para el cálculo del valor absoluto del error, pero no para el valor real del error, que aparenta tener una componente sinusoidal.

Al calcular el cociente entre el valor absoluto calculado mediante la fórmula y el error real se obtiene la siguiente tabla:

Cocientes

1.00000001
-1.00000001
1.00000001
-1.00000001
1.00000001
-1.00000001
1.00000001
-1.00000001
1.00000001
-1.00000001

Esta secuencia de números alternativos se puede representar de dos formas:

a) Como $(-1)^{(n-2)}$

b) o como $\cos(\pi(n-2)$

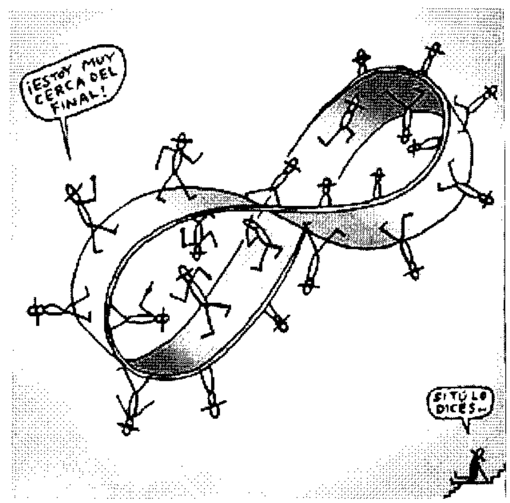
Al consolidar todas estas formulas se tendría que llegar a que:

$$g = ka^n + 0.2763932a^{-(n-2)}\cos(\pi(n-2))$$

Al tabular esta última fórmula (partiendo de n=2 hasta 39) se obtiene:

FÓRMULA FINAL

1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
233



377
610
987
1597
2584
4181
6765
10946
17711
28657
46368
75025
121393
196418
317811
514229
832040
1346269
2178309
3524578
5702887
9227465
14930352
24157817
39088169

Aunque en esta tabla se han expresado los valores enteros, sí existen diferencias de orden decimal entre los valores calculados en la última fórmula, y los valores de Fibonacci que se expresan en la siguiente tabla:

DIFERENCIA CON LA SECUENCIA ORIGINAL
2.25008E-09
-1.39511E-09
8.70971E-10
-5.46772E-10
3.46062E-10
-2.19089E-10
1.41339E-10
-8.84839E-11
6.06377E-11
-3.33671E-11
3.11218E-11
-4.88853E-12
2.80238E-11
2.19416E-11
5.0818E-11
7.21911E-11
1.23237E-10
1.95087E-10
3.18323E-10
5.13865E-10
8.33097E-10
1.34605E-09
2.17915E-09
3.52884E-09
5.70435E-09
9.22591E-09
1.49594E-08
2.41562E-08
3.91155E-08
6.33299E-08
1.02445E-07
1.6531E-07
2.68221E-07
4.33996E-07
7.02217E-07
1.13621E-06
1.83657E-06
2.97278E-06

Es obvio que estos errores son insignificantes, pero tienden a crecer conforme el valor de n se incrementa.

Sin embargo, para valores grandes de los términos de la serie de Fibonacci es mejor aproximar el comportamiento de la serie a una simple función exponencial.

CONCLUSIONES:

Aunque Fibonacci corresponde a una serie matemática relativamente simple ha tenido una cantidad considerable de implicaciones en la evolución de las matemáticas, y al estudiarla a fondo es posible deducir una fórmula que permita reenfocarla, y prescindir de usar el algoritmo a que estábamos acostumbrados y en su lugar usar una fórmula que resulte más práctica para valores grandes de la serie.

Esto también nos lleva a pensar que para muchas de las series y fórmulas conocidas bien puede haber nuevos planteamientos, hasta el momento desconocidos, y que la última palabra en el mundo de las matemáticas aún dista mucho de haber sido dicha.

BIBLIOGRAFÍA:

http://es.wikipedia.org/wiki/leonardo de Pisa.