Facultad : Ingeniería.
Escuela : Biomédica
Lugar de Ejecución : Laboratorio de Biomédica

Tema: TRATAMIENTO DE DATOS

Objetivos

1. Que el estudiante se familiarice con el concepto de error en una medición.
2. Que el estudiante tenga la capacidad de evaluar la incertidumbre durante la medición.
3. Que el estudiante tenga la capacidad de utilizar el método de los mínimos cuadrados como herramienta para manipular datos experimentales de tendencia lineal.

Recomendaciones

1. Tenga orden y aseo para trabajar
2. Al finalizar el laboratorio se debe dejar en óptimas condiciones los accesorios y herramientas utilizadas, así como su puesto de trabajo.
3. Asegúrese de apagar todos los equipos antes de retirarse

Materiales y Equipos

1. Computadora
2. Microsoft Office Excel instalado.

Introducción Teórica

MEDIDA E INCERTIDUMBRE

Medir consiste en comparar una magnitud con otra que utilizamos como patrón (unidad). Este proceso lleva siempre implícito una indeterminación, es decir siempre que medimos, por razones muy diversas y, en general, difíciles de evitar, corremos el riesgo de no "acertar" con el valor exacto de la magnitud que queremos conocer. Unas veces esto es debido a la imperfección de nuestros instrumentos, al diseño del proceso de medida, o a factores ambientales, etc. de manera que cuando expresamos el valor "medido" de una magnitud debemos siempre hacer una estimación del grado de confianza con el que hemos realizado la medida. Podemos clasificar los errores en dos tipos:

Error Accidental: Originado por el ser humano o por el ambiente, por ejemplo descuido al hacer las medidas, forma inadecuada de hacerlas, influencias o interferencias ambientales, etc.

Error Sistemático: Se deben a las limitaciones o fallas de funcionamiento de los aparatos de medición, mal calibrados o tener poca precisión.

En ambos casos, consideraremos al error como aleatorio, es decir, puede provenir de cualquier causa u origen.

ERRORES EN OBSERVACIONES DIRECTAS

Los errores estadísticos o aleatorios pueden ser estimados realizando un cierto número de veces, n, el experimento. A estas medidas repetidas de una cierta magnitud, x1, x2, x3, … xn, las llamaremos datos.

VALOR MEDIO

El mejor valor que podemos entonces ofrecer para la magnitud medida es la media, o valor medio de acuerdo con la expresión matemática:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \qquad \text{(Ec.1)}$$

Ejemplo (1): De la medición de diámetro de una tubería, se obtuvieron los siguientes datos:
x1=9.5 mm, x2=9.6 mm y x3= 9.4 mm ¿Cuál es el valor medio?

Aplicando la Ec.1, la sumatoria de los datos es 9.5 + 9.6 + 9.4 = 28.5 , dividido entre el número de datos (3): 28.5 / 3 = 9.5 mm, el cual representa el valor medio de las mediciones de diámetro.

DESVIACIÓN

Se define la desviación de cada medida como la diferencia entre el valor medido y el valor verdadero. Como el valor verdadero es desconocido, tomaremos como desviación de cada medida la diferencia entre su valor y el valor medio, y la denominaremos desviación estimada:

$$d_i = x_i - \bar{x} \qquad \text{(Ec.2)}$$

¿Cual es la desviación en las mediciones realizadas en el ejemplo (1)? Respuesta: EL mayor valor medido fue de 9.6 mm, por lo que la desviación será: 9.6 mm – 9.5 mm (valor medio) = 0.1 mm.

DESVIACIÓN ESTÁNDAR

Para estimar el error cometido en una serie de medidas se puede realizar una media de sus desviaciones. En estadística se llama desviación estándar a este promedio de desviaciones, de acuerdo con la expresión:

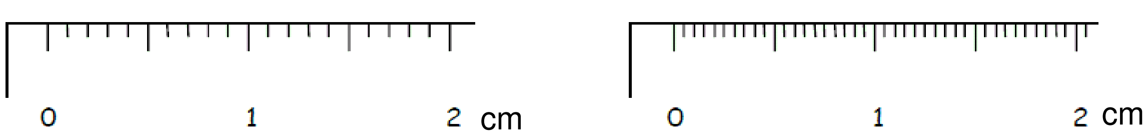
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad \text{(Ec.3)}$$

Volviendo al caso del ejemplo (1), donde se tienen tres mediciones, la primera desviación es (9.5-9.5), la segunda (9.6-9.5) y la tercera (9.4-9.5), esto da como resultado: **σ = 0.08**

El cuadrado de la desviación estándar, σ^2, es la **varianza.**

PRECISIÓN

Es la medida más pequeña que podemos realizar con un aparato. Cuando el número de medidas realizadas no sea significativo este valor es la mejor estimación del error cometido.



Para la regla de la izquierda, la precisión es de 0.1cm (1 mm), ya que es la menor medida que podemos realizar, para la regla de la derecha, la precisión es de 0.05 cm (0.5 mm). Si un objeto mide 1.5 cms de largo, deberá escribirse su medición de la siguiente manera: Para la regla izquierda: 1.5 cm ± 0.1 cm y para la regla derecha: 1.5 cm ± 0.05 cm.

ERROR ABSOLUTO

Tomaremos como valor del error absoluto a la mayor medida de sus estimaciones, es decir: o la desviación estándar o la precisión de los instrumentos. El error absoluto se expresa en las mismas unidades que la magnitud que se está midiendo en la forma:

$$x = (\overline{x} \pm \delta\, x)\; unid. \quad \text{(Ec.4)}$$

Ejemplo (2) ¿Como debemos expresar el error absoluto para la siguientes mediciones? Considerar la precisión del amperímetro en 0.1Amp.

I (Amp.)
6.5
6.6
6.45
6.8
6.72

Calculando mediante la Ec(1), la media de los valores resulta en: 6.614, que podemos expresar como 6.6. De la Ec(3)calculamos la desviación estándar siendo su valor: 0.15

El error absoluto es el mayor valor entre la precisión del aparato (0.1 A) y la Desviación estándar (0.15 A), por lo que las mediciones se expresarían así: ***I = 6.6 ± 0.15 Amp.***

ERROR RELATIVO

Se define como el cociente entre el error absoluto estimado y el valor medio (o el valor medido). Se expresa habitualmente como porcentaje (%) :

$$\varepsilon = \frac{\delta x}{\overline{x}} \times 100 \qquad \text{(Ec.5)}$$

y se escribe de la forma:

$$x = \overline{x} \pm \varepsilon \ (\%) \qquad \text{(Ec.6)}$$

¿Cual sería el error relativo de los datos del ejemplo (2)? El resultado de dividir el error absoluto (0.15) entre el valor medio (6.6) da como resultado: 0.0227, que al multiplicar por 100% resulta 2.2%, por lo que el valor se expresaría: I = 6.6 ± 2.2%

ERRORES EN OBSERVACIONES INDIRECTAS

Es muy frecuente que el valor de una magnitud se obtenga a partir de una o varias medidas directas aplicando las correspondientes operaciones matemáticas. A esto le llamaremos observación indirecta y en este caso los errores cometidos en las observaciones directas de los datos influirán en el error con el que obtendremos el resultado en función de la fórmula utilizada.

SUMA Y DIFERENCIA

Al ser el error producto del azar, puede tener cualquier signo. Así pues, cuando sumemos o restemos dos cantidades medidas, deberemos considerar el error absoluto estimado del resultado como la suma de los errores absolutos estimados de cada medida.

Ejemplo (3)

A = (5.2 ± 0.2) + (3.8 ± 0.1) = (9.0 ± 0.3)

B = (5.3 ± 0.1) - (3.3 ± 0.2) = (2.0 ± 0.3)

PRODUCTO Y COCIENTE

Para las operaciones producto y cociente el error relativo será la suma de los errores relativos de las variables.

Ejemplo (4) Si el Voltaje medido es de 3.9 ± 0.1 V y la corriente medida es de 2.2 ± 0.2 Amp, ¿cual será la potencia calculada?

Sabemos que la Potencia es igual al voltaje por la corriente (P=V.I), obtenemos los errores relativos para cada parámetro y los sumamos, de la siguiente manera:

$\varepsilon_V = (0.1 / 3.9)\ 100\% = 2.5\%$ y $\varepsilon_I = (0.2 / 2.2)\ 100\% = 9\%$, $\varepsilon_p = \varepsilon_V + \varepsilon_I = 11.5\%$

Entonces, expresamos la potencia como P= V . I = (3.9) (2.2) = 8.58 Watts, y añadiendo el error relativo calculado: **P = 8.58 ± 11.5% Watts**, o lo que es igual**, P = 8.58 ± 1 Watts**

OTRAS FUNCIONES

Para un parámetro que esté en función de otra variable, el error será igual a la derivada de la función que relaciona ambos parámetros:

Sea: $z = q(x)$ El error será igual a: $$\delta z = \left|\frac{dq(x)}{dx}\right| \delta x \qquad \text{(Ec.7)}$$

AJUSTE POR REGRESIÓN LINEAL (METODO DE MINIMOS CUADRADOS)

Hasta ahora nos hemos referido a la manera de obtener el mejor valor de una magnitud a partir de una o varias medidas o conjuntos de medidas. Un problema más general es el de determinar una relación funcional entre dos magnitudes x e y como resultado de experimentos, de manera que son los parámetros de la función las magnitudes que realmente deseamos conocer. El ajuste más sencillo de un conjunto de datos a una determinada función es el que se denomina por mínimos cuadrados, y que consiste en calcular los parámetros de una función conocida haciendo que la suma de las desviaciones de los datos experimentales respecto de la función sea mínima.

El caso más sencillo es el ajuste a una recta, en este caso también se le suele denominar correlación lineal.

Si disponemos de un conjunto de pares de puntos **(x1,y1), (x2,y2), … (xn, yn)** obtenidos experimentalmente y que deberían corresponder a la expresión teórica **y = a x + b** podemos estimar el mejor valor de los parámetros **a** y **b.**

$$a = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2}, \qquad b = \frac{\sum y - a\sum x}{n} \qquad \text{(Ec.7 y Ec. 8)}$$

El coeficiente de correlación r nos da idea del grado de linealidad del ajuste. Cuanto más se aproxime a 1 mejor será la correlación lineal entre los datos experimentales y la relación teórica, la expresión para su cálculo es:

$$r^2 = \frac{\left(n\sum xy - \sum x \sum y\right)^2}{\left(n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2\right)\left(n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2\right)} \qquad \text{(Ec.9)}$$

Procedimiento

PARTE I.

Determinación del coeficiente de dilatación lineal del Aluminio (λ)

1. En la tabla 1 se presentan los resultados experimentales obtenidos en la medición de la longitud de una barra delgada de aluminio para diferentes temperaturas. La medición de la longitud se realizo con un instrumento cuya precisión era de 0.1mm. Se desarrollaron cinco mediciones de longitud para cada temperatura. La temperatura se midió con una termómetro digital con un 0.1 ºC de precisión.

T (ºC)	L1 (mm)	L2 (mm)	L3 (mm)	L4 (mm)	L5 (mm)
25.0	350.0	349.9	350.2	350.0	350.1
100.0	350.4	350.1	350.7	350.4	350.4
175.0	350.7	351.4	351.0	351.1	351.0
250.0	351.2	352.1	351.8	352.0	352.0
325.0	352.1	352.4	352.8	352.3	352.5
400.0	353.2	353.3	352.9	353.1	353.1

TABLA 1. Resultados experimentales de diferentes mediciones de la longitud de una barra de aluminio para diferentes temperaturas.

2. Obtenga el valor de la longitud de la barra correspondiente a cada temperatura, así como su error absoluto o incerteza y anótelo en la tabla 2.

3. Represente gráficamente la longitud de la barra en función de su temperatura.

4. Asumiendo una dependencia lineal entre la longitud de la barra y su temperatura, se define el coeficiente de dilatación lineal, L, como aquel que cumple la siguiente relación:

$$\mathbf{L = Lo\,[\,1 + \lambda\,(\,T - To\,)\,]}$$

Donde,

Lo es la longitud a la temperatura de referencia To

L es la longitud a la temperatura T

5. Con los datos obtenidos complete la tabla 2.

T (°C)	L (mm)	σ (mm)
T_O = 25.0	L_O=	
100.0		
175.0		
250.0		
325.0		
400.0		

TABLA 2 Resultados obtenidos a partir del análisis.

6. A partir de las ecuaciones 7 y 8, infiera los valores de a y b que relacionan la longitud de la barra con su temperatura, pero antes de aplicar las ecuaciones, llene los valores de la siguiente tabla:

T (°C)	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
25.0					
100.0					
175.0					
250.0					
325.0					
400.0					
$\sum_{i=1}^{N}$					

TABLA 3. Tabulación de datos requeridos para la obtención de la recta de regresión.

7. Ahora con los valores obtenidos aplique las Ec. 7, 8 y 9, y llene la siguiente tabla:

	m	b	r^2
Valor			

TABLA 4. Valores de ***m***, ***b*** y factor de correlación.

8. Determine finalmente el valor del coeficiente de dilatación del aluminio (λ)

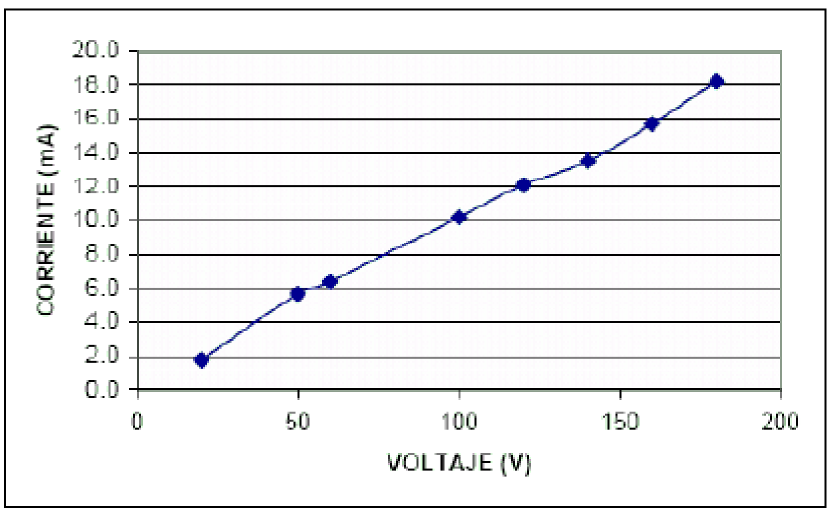
λ = _____

PARTE II.

Utilización de Microsoft Excel para el cálculo de la Correlación Líneal.

Cuando se realizan mediciones prácticas e Corriente (mA), Voltaje (Voltios) y Resistencia (Ω), se da por hecho que se mantiene la relación establecida en la Ley de Ohm, entre las variables antes mencionadas. Sin embargo, las mediciones siempre vienen acompañadas de errores, es por ello que aunque se realice la división del Voltaje entre la Corriente, en un mismo circuito, el valor no permanece constante, cuando debería (en condiciones ideales). Esto se puede ver en un ejemplo clásico, como el que representa la siguiente tabulación de Voltaje y Corriente.

VOLTAJE (V)	CORRIENTE (mA)
20	1.8
50	5.7
60	6.4
100	10.2
120	12.1
140	13.5
160	15.7
180	18.2



Claramente se puede observar que si la línea recta representa la relación entre el Voltaje y la Corriente, es decir, la Resistencia, la misma no permanece constante para todas las mediciones, lo cual se debe en gran medida a errores en la medición. Para hacer que los análisis sean completamente objetivos, tal y como ya se apunto anteriormente, se necesita hacer uso de operaciones propias de la estadística. Es por ello que con la información hasta ahora obtenida, se realizará un procedimiento de regresión lineal haciendo uso de un programa de uso común como es Microsoft Excel, que permite mediante unos cuantos pasos, obtener toda la información necesaria para el trazado de una recta característica.

1. Abra una hoja de Excel, copie los datos de la tabla Voltaje-Corriente anterior, añada tres columnas que serán usadas para determinar las cantidades xy, x2, y2 para cada par de información, y sus respectivas sumatorias.
2. Luego utilice Excel y las ecuaciones 7, 8 y 9 para calcular los parámetros de regresión lineal: a, b y r^2. El alumno deberá obtener algo parecido a la siguiente figura:

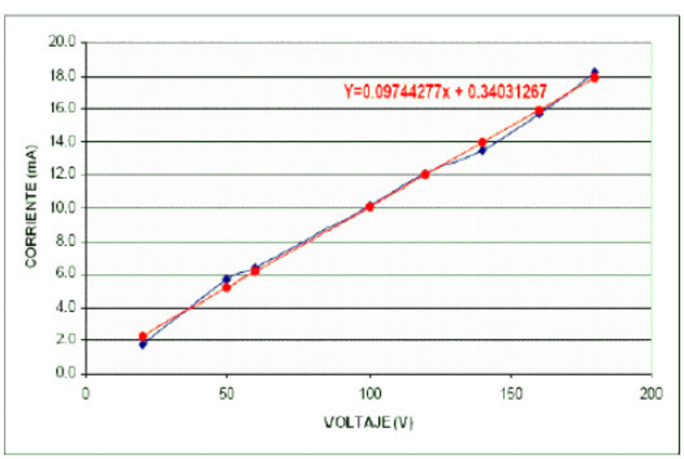
	A	B	C	D	E	F
1		x	y	xy	x^2	y^2
2		20	1.8	36	400	3.24
3		50	5.7	285	2500	32.49
4		60	6.4	384	3600	40.96
5		100	10.2	1020	10000	104.04
6		120	12.1	1452	14400	146.41
7		140	13.5	1890	19600	182.25
8		160	15.7	2512	25600	246.49
9		180	18.2	3276	32400	331.24
10						
11	n	Σx	Σy	Σxy	Σx^2	Σy^2
12	8	830	83.6	10855	108500	1087.12
13						
14		$(\Sigma x)^2$	$(\Sigma y)^2$			
15		688900	6988.96			
16						
17		m	0.097442769			
18		b	0.340312674			
19		r	0.997822926			

=((A12*D12)-(B12*C12))/((A12*E12)-B15

=((E12*C12)-(B12*D12))/((A12*E12)-B15)

=RAIZ((POTENCIA(((A12*D12)-(B12*C12)),2))/(((A12*E12)-B15)*((A12*F^2)-C15)))

3. Con los datos obtenidos se puede trazar el gráfico correspondiente, con una nueva línea que representa la correlación lineal.



Análisis de los resultados

1. ¿Es lo mismo error que incerteza, o incertidumbre? Explique
2. Explique si podemos considerar como lineal la relación entre la longitud de una barra de aluminio y la temperatura, ¿en que basamos nuestras afirmaciones?
3. Explique cómo podría afectar en los cálculos de la parte II el hecho que el voltímetro y el amperímetro utilizado tuvieran una precisión de 1 V y 1 A respectivamente.

Investigación Complementaria

1. Desarrolle la Parte II de esta práctica haciendo uso de las funciones estadísticas incluidas en Microsoft Excel, tales como media, desviación estándar y coeficiente de correlación.
2. Identifique cada uno de los datos obtenidos.
3. Investigue el procedimiento para el desarrollo de la Regresión Exponencial.
4. Diseñe o re-Diseñe e implemente una fuente de voltaje con las siguientes características:
    - Salida de voltaje Fija de + 5 Vdc
    - Salidas de Voltaje Fijas de ± 12 Vdc
    - Salida de voltaje bipolar ajustable: ± 24 Vdc
    - Salida de Voltaje Alterna 12,24 VAC
    - Capacidad de corriente de salida: 1 amp.

Bibliografia

1. Microsoft Office Excel 2007 step by step
Frye, Curtis, 1968-
Libro 005.54 F83 2007

2. Guía sobre incertidumbre en la medición industrial
Editado por: Incotec
Libro 621.3742 G953 2006

Hoja de cotejo: 1

Guía __: Desarrollo y Act. Complementaria

Alumno: Mesa No:

Docente: GL: Fecha:

EVALUACION					
	%	**1-4**	**5-7**	**8-10**	**Nota**
CONOCIMIENTO (Aberturas, Velocidades, etc.)	20%	Conocimiento deficiente de los fundamentos teóricos	Conocimiento y explicación incompleta de los fundamentos teóricos	Conocimiento completo y explicación clara de los fundamentos teóricos	
APLICACIÓN DEL CONOCIMIENTO	15%				
	15%				
	20%				
ACTITUD Trabajo en equipo Responsable: Guías de lab.	15%	Es un Observador Pasivo.	Participa Ocasionalmente o lo hace constantemente pero sin coordinación con sus compañeros de Puesto de trabajo.	Participa propositiva e integralmente en toda la Practica.	
Manejo de Recursos: Actividad requerida para la práctica Análisis	15%	Es Ordenado pero no hace un uso adecuado de los Recursos	Hace un Uso de Recursos respetando las pautas de seguridad, pero es desordenado	Hace un manejo responsable y adecuado de los Recursos de conformidad a pautas de seguridad e Higiene	
TOTAL	100%				